Ekipno tekmovanje
30. avgust 2018

Slovene version

Naloga T–1

Naj bodo a, b in c pozitivna realna števila, ki zadoščajo pogoju $abc = 1$. Dokaži, da velja

$$\frac{a^2 - b^2}{a + bc} + \frac{b^2 - c^2}{b + ca} + \frac{c^2 - a^2}{c + ab} \leq a + b + c - 3.$$

Naloga T–2

Naj bo $P(x)$ polinom stopnje $n \geq 2$ z racionalnimi koeficienti. Polinom $P(x)$ ima n paroma različnih realnih ničel, ki tvorijo aritmetično zaporedje. Dokaži, da med ničlami od $P(x)$ obstajata dve, ki sta obe hkrati ničli nekega polinoma stopnje 2 z racionalnimi koeficienti.

Naloga T–3

V skupini piratov je prišlo do prepira in sedaj vsak pirat drži dva druga na muhi. Vsi pirati so poklicani drug za drugim v nekem vrstnem redu. Če je pirat, ki je poklican, še živ, ustreli oba, na katera meri (kateri od njiju je morda že mrtev). Vsi streli so takoj smrtni. Po tem, ko so bili poklicani vsi pirati, se izkaže, da jih je bilo ubitih natanko 28.

Dokaži, da jih bo, ne glede na vrstni red, v katerem so bili pirati poklicani, na koncu vsaj 10 ubitih.

Naloga T–4

Naj bo n naravno število in $u_1, u_2, \ldots, u_n$ naravna števila manjša ali enaka 2^k, kjer je $k \geq 3$ naravno število. *Predstavitev* nenegativnega celega števila t je zaporedje nenegativnih celih števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tako da velja

$$t = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n.$$

Dokaži, da če ima nenegativno celo število t predstavitev, potem ima tudi predstavitev, v kateri je manj kot $2k$ od števil $a_1, a_2, \ldots, a_n$ neničelnih.

Čas: 5 ur
Čas za vprašanja: 60 min
Vsaka naloga je vredna 8 točk.
Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.

Naloga T–5

Naj bo ABC ostrokotni trikotnik, v katerem velja $|AB| < |AC|$, in naj bo D nožišče višine iz A. Točki B' in C' ležita zaporedoma na poltrakih AB in AC, tako da so točke B', C' in D kolinearne in točke B, C, B' in C' ležijo na isti krožnici s središčem v O. Dokaži, da če je M razpolovišče BC in H višinska točka trikotnika ABC, potem je $DHMO$ paralelogram.

Naloga T–6

Naj bo ABC trikotnik. Notranja simetrala kota $\angle ABC$ seka stranico AC v točki L in trikotniku ABC očrtano krožnico ponovno v $W \neq B$. Naj bo K pravokotna projekcija L na AW. Trikotniku BLC očrtana krožnica seka premico CK ponovno v $P \neq C$. Premici BP in AW se sekata v točki T. Dokaži, da velja $|AW| = |WT|$.

Naloga T–7

Naj bo $a_1, a_2, a_3, \ldots$ zaporedje naravnih števil, tako da velja

$$a_1 = 1 \qquad \text{in} \qquad a_{k+1} = a_k^3 + 1 \text{ za vsa naravna števila } k.$$

Dokaži, da za vsako praštevilo p oblike $3\ell + 2$, kjer je ℓ nenegativno celo število, obstaja naravno število n, tako da je a_n deljiv s p.

Naloga T–8

Celo število n se imenuje *šlezijsko*, če obstajajo taka naravna števila a, b in c, da je

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

(a) Dokaži, da obstaja neskončno mnogo šlezijskih celih števil.

(b) Dokaži, da obstaja naravno število, ki ni šlezijsko.

Čas: 5 ur
Čas za vprašanja: 60 min
Vsaka naloga je vredna 8 točk.
Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.