Úloha T–1

Nech a, b a c sú kladné reálne čísla spĺňajúce $abc = 1$. Dokážte, že

$$\frac{a^2 - b^2}{a + bc} + \frac{b^2 - c^2}{b + ca} + \frac{c^2 - a^2}{c + ab} \leq a + b + c - 3.$$

Úloha T–2

Nech $P(x)$ je polynóm stupňa $n \geq 2$ s racionálnymi koeficientami taký, že $P(x)$ má n po dvoch rôznych reálnych koreňov, ktoré tvoria aritmetickú postupnosť. Dokážte, že medzi koreňmi $P(x)$ sú dva, ktoré sú aj koreňmi nejakého polynómu stupňa 2 s racionálnymi koeficientami.

Úloha T–3

Skupina pirátov sa pohádala a teraz každý z nich mieri na iných dvoch pirátov. Všetci piráti sú postupne vyvolávaní v nejakom poradí. Ak je vyvolaný pirát stále nažive, vystrelí na oboch pirátov, na ktorých mieri (niektorí z nich môžu byť už mŕtvi). Všetky strely sú hneď smrteľné. Po tom, čo všetci piráti boli vyvolaní, sa zistilo, že 28 pirátov bolo zabitých.

Dokážte, že nech by boli piráti vyvolaní v akomkoľvek inom poradí, aspoň 10 z nich by bolo zabitých aj tak.

Úloha T–4

Nech n je kladné celé číslo a $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sú kladné celé čísla neprevyšujúce 2^k, pre nejaké celé číslo $k \geq 3$. *Reprezentácia* celého čísla t je postupnosť nezáporných celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ taká, že

$$t = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n.$$

Dokážte, že ak celé číslo t má reprezentáciu, tak má aj reprezentáciu, kde menej ako $2k$ z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ je nenulových.

Čas na riešenie: 5 hodín
Čas na otázky: 60 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.
Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.

Úloha T–5

Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s $|AB| < |AC|$ a nech D ja päta výšky z vrcholu A. Body B' a C' ležia na polpriamkach AB a AC tak, že body B', C' a D ležia na jednej priamke a body B, C, B' a C' ležia na jednej kružnici so stredom O. Dokážte, že ak M je stred BC a H je ortocentrum trojuholníka ABC, tak $DHMO$ je rovnobežník.

Úloha T–6

Nech ABC je trojuholník. Os uhla ABC pretína stranu AC v bode L a kružnicu opísanú trojuholníku ABC znova v bode $W \neq B$. Nech K je kolmá projekcia bodu L na priamku AW. Kružnica opísaná trojuholníku BLC pretína priamku CK znova v bode $P \neq C$. Priamky BP a AW sa pretínajú v bode T. Dokážte, že $|AW| = |WT|$.

Úloha T–7

Nech $a_1, a_2, a_3, \ldots$ je postupnosť kladných celých čísel taká, že

$$a_1 = 1 \qquad \text{a} \qquad a_{k+1} = a_k^3 + 1, \text{ pre všetky kladné celé čísla } k.$$

Dokážte, že pre každé prvočíslo p tvaru $3\ell + 2$, kde ℓ je nezáporné celé číslo, existuje kladné celé číslo n také, že a_n je deliteľné p.

Úloha T–8

Celé číslo n nazývame *sliezske*, ak existujú kladné celé čísla a, b a c také, že

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

(a) Dokážte, že existuje nekonečne veľa sliezskych čísel.

(b) Dokážte, že nie všetky kladné celé čísla sú sliezske.