Задача T–1

Даны положительные действительные числа a, b и c, удовлетворяющие условию $abc = 1$. Докажите, что
$$\frac{a^2-b^2}{a+bc} + \frac{b^2-c^2}{b+ca} + \frac{c^2-a^2}{c+ab} \leq a+b+c-3.$$

Задача T–2

Многочлен $P(x)$ степени $n \geq 2$ с рациональными коэффициентами таков, что его n попарно различных действительных корней образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что среди корней $P(x)$ найдутся два, которые также являются корнями некоторого квадратного трёхчлена с рациональными коэффициентами.

Задача T–3

Несколько пиратов поссорились, в результате чего каждый из них держит каких-то двух других на прицеле. Всех пиратов по очереди называют в каком-то порядке. Если пират, которого назвали, жив, то он сразу стреляет в двух пиратов, которых он держал на прицеле (некоторые из них могут быть уже мертвы). Все выстрелы сразу убивают. После того, как всех пиратов назвали, оказалось, что ровно 28 из них были убиты.

Докажите, что в каком бы другом порядке пиратов не называли, все равно хотя бы 10 пиратов будут убиты.

Задача T–4

Дано натуральное число n и натуральные числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$, не превосходящие 2^k, для некоторого натурального $k \geq 3$. Назовём *представлением* числа t такую последовательность неотрицательных целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что
$$t = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n.$$

Докажите, что если целое неотрицательное t имеет представление, то оно также имеет представление, где среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ менее, чем $2k$ ненулевых.

Время: 5 часов
Время для вопросов: 60 минут
Каждая задача оценивается в 8 баллов.
Порядок задач не зависит от их сложности.

Задача T–5

Пусть D – основание высоты из точки A в остроугольном треугольнике ABC, в котором $AB < AC$. Точки B' и C' лежат на лучах AB и AC соответственно так, что точки B', C' и D коллинеарны, а точки B, C, B' и C' лежат на одной окружности с центром O. Докажите, что если M – середина BC, а H – ортоцентр ABC, то $DHMO$ – параллелограмм.

Задача T–6

Дан треугольник ABC. Внутренняя биссектриса угла $\angle ABC$ пересекает сторону AC в точке L, а описанную окружность треугольника ABC в точке $W \neq B$. Пусть K – основание перпендикуляра из L на AW. Описанная окружность треугольника BLC пересекает прямую CK второй раз в точке $P \neq C$. Прямые BP и AW пересекаются в точке T. Докажите, что $AW = WT$.

Задача T–7

Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots$ такова, что

$$a_1 = 1 \qquad \text{и} \qquad a_{k+1} = a_k^3 + 1, \text{ для всех натуральных } k.$$

Докажите, что для любого простого числа p вида $3\ell + 2$, где ℓ – целое неотрицательное число, существует такое натуральное число n, что a_n делится нацело на p.

Задача T–8

Натуральное число n назовём *Силезийским*, если существуют такие натуральные числа a, b и c, что

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

(а) Докажите, что существует бесконечно много натуральных Силезийских чисел.

(б) Докажите, что не любое натуральное число является Силезийским.