Zadanie T–1

Dodatnie liczby rzeczywiste a, b i c spełniają $abc = 1$. Udowodnić, że

$$\frac{a^2 - b^2}{a + bc} + \frac{b^2 - c^2}{b + ca} + \frac{c^2 - a^2}{c + ab} \leqslant a + b + c - 3.$$

Zadanie T–2

Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia $n \geqslant 2$ o współczynnikach wymiernych, który posiada n parami różnych pierwiastków rzeczywistych tworzących ciąg arytmetyczny. Udowodnić, że wśród pierwiastków $P(x)$ istnieją dwa, które są również pierwiastkami pewnego wielomianu stopnia 2 o współczynnikach wymiernych.

Zadanie T–3

Pewna grupa piratów pokłóciła się i każdy z nich ma dwóch innych piratów na celowniku. Wszyscy piraci są wywoływani pojedynczo, w pewnej kolejności. Jeśli wywołany pirat żyje, strzela do dwóch innych piratów, w których celuje (którzy mogą być już martwi). Wszystkie strzały są śmiertelne. Gdy wszyscy piraci zostali wywołani, okazało się, że zginęło dokładnie 28 piratów.

Udowodnić, że gdyby piraci byli wywoływani w dowolnej innej kolejności, i tak zginęłoby co najmniej 10 z nich.

Zadanie T–4

Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech $u_1, u_2, \ldots, u_n$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi nie większymi niż 2^k, dla pewnej liczby całkowitej $k \geqslant 3$. *Reprezentacją* liczby całkowitej t nazwiemy ciąg nieujemnych liczb całkowitych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, dla których

$$t = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n.$$

Udowodnić, że jeśli liczba całkowita t posiada reprezentację, to posiada również reprezentację, w której wśród liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest mniej niż $2k$ niezerowych.

Czas: 5 godzin
Czas na zadawanie pytań: 60 minut
Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.

Zadanie T–5

W trójkącie ostrokątnym ABC, w którym $AB < AC$, punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A. Punkty B' i C' leżą odpowiednio na półprostych AB i AC, przy czym punkty B', C' i D są współliniowe, zaś punkty B, C, B' i C' leżą na jednym okręgu o środku w punkcie O. Punkty M i H to odpowiednio środek odcinka BC oraz ortocentrum trójkąta ABC. Wykazać, że czworokąt $DHMO$ jest równoległobokiem.

Zadanie T–6

W trójkącie ABC dwusieczna kąta ABC przecina odcinek AC w punkcie L oraz okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie $W \neq B$. Niech K będzie rzutem prostokątnym punktu L na prostą AW. Okrąg opisany na trójkącie BLC przecina prostą CK w punkcie $P \neq C$. Proste BP i AW przecinają się w punkcie T. Udowodnić, że $AW = WT$.

Zadanie T–7

Niech $a_1, a_2, a_3, \ldots$ będzie ciągiem dodatnich liczb całkowitych spełniającym

$$a_1 = 1 \qquad \text{oraz} \qquad a_{k+1} = a_k^3 + 1 \text{ dla każdej dodatniej liczby całkowitej } k.$$

Udowodnić, że dla każdej liczby pierwszej p postaci $3\ell+2$, gdzie ℓ jest nieujemną liczbą całkowitą, istnieje dodatnia liczba całkowita n taka, że liczba a_n jest podzielna przez p.

Zadanie T–8

Liczbę całkowitą n nazwiemy *śląską*, jeżeli istnieją dodatnie liczby całkowite a, b oraz c spełniające

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

(a) Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb śląskich.

(b) Udowodnić, że nie wszystkie dodatnie liczby całkowite są śląskie.

Czas: 5 godzin
Czas na zadawanie pytań: 60 minut
Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.