Užduotis T–1

Duota, kad realieji teigiami skaičiai a, b ir c tenkina lygybę $abc = 1$. Įrodykite nelygybę:

$$\frac{a^2 - b^2}{a + bc} + \frac{b^2 - c^2}{b + ca} + \frac{c^2 - a^2}{c + ab} \leq a + b + c - 3.$$

Užduotis T–2

Daugianaris $P(x)$ su racionaliaisiais koeficientais, kurio laipsnis lygus $n \geq 2$, turi n realiųjų poromis skirtingų šaknų, sudarančių aritmetinę progresiją. Įrodykite, kad tarp tų daugianario $P(x)$ šaknų yra dvi, kurios yra ir 2-o laipsnio daugianario su racionaliaisiais koeficientais šaknys.

Užduotis T–3

Piratų gaujoje kilo kivirčas. Dėl to kiekvienas piratas nusitaikė pistoletais į kuriuos nors du kitus. Piratai po vieną kartą tam tikra tvarka yra pašaukiami. Jei pašauktasis piratas tuo metu dar gyvas, jis šauna į abu piratus, į kuriuos buvo nusitaikęs (net jei bent vienas iš jų jau negyvas). Kiekvienas gyvas, į kurį šaunama, žūva iš karto. Pašaukus visus piratus, žuvo lygiai 28 piratai. Įrodykite, kad šaukiant piratus bet kokia kita tvarka, vis tiek žūtų mažiausiai 10 piratų.

Užduotis T–4

Duotas natūralusis skaičius n. Duoti natūralieji skaičiai $u_1, u_2, \ldots, u_n$, ne didesni už 2^k, kur $k \geq 3$ yra tam tikras natūralusis skaičius. Neneigiamo sveikojo skaičiaus t *išraiška* vadinsime neneigiamų sveikųjų skaičių seką $a_1, a_2, \ldots, a_n$, kuriai

$$t = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n.$$

Įrodykite, kad jei neneigiamas sveikasis skaičius t turi išraišką, tai jis turi tokią išraišką, kurioje nelygūs 0 yra mažiau nei $2k$ iš skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Užduotis T–5

Smailiojo trikampio ABC, kuriame $AB < AC$, aukštinės iš viršūnės A pagrindas pažymėtas D. Tiesių spinduliuose AB ir AC atitinkamai pažymėti tokie taškai B' ir C', kad taškai B', C' ir D yra vienoje tiesėje, o taškai B, C, B' ir C' priklauso vienam apskritimui su centru O. Taškas M dalija atkarpą BC pusiau, o trikampio ABC aukštinės kertasi taške H. Įrodykite, kad keturkampis $DHMO$ yra lygiagretainis.

Užduotis T–6

Duotas trikampis ABC. Kampo ABC (vidinė) pusiaukampinė kerta kraštinę AC taške L, o trikampio ABC apibrėžtinį apskritimą – taške $W \neq B$. Statmens iš taško L į tiesę AW pagrindas pažymėtas K. Trikampio BLC apibrėžtinis apskritimas kerta tiesę CK taške $P \neq C$. Tiesės BP ir AW kertasi taške T. Įrodykite, kad $AW = WT$.

Užduotis T–7

Natūraliųjų skaičių seka $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tenkina lygybes

$$a_1 = 1 \qquad \text{ir} \qquad a_{k+1} = a_k^3 + 1, \text{ kai } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Įrodykite, kad kiekvienam pirminiam skaičiui $p = 3\ell + 2$, kur ℓ yra koks nors neneigiamas sveikasis skaičius, egzistuoja toks natūralusis skaičius n, kad skaičius a_n dalijasi iš p.

Užduotis T–8

Sveikąjį skaičių n vadinsime *silezietišku*, jei egzistuoja tokie natūralieji skaičiai a, b ir c, kad

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

(a) Įrodykite, kad yra be galo daug silezietiškų sveikųjų skaičių.

(b) Įrodykite, kad ne kiekvienas natūralusis skaičius yra silezietiškas.

Darbui skiriamos 5 valandos.
Laikas klausimams: 60 min
Kiekviena užduotis verta 8 taškų.
Užduočių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.