T–1. Feladat

Legyenek a, b és c olyan pozitív valós számok, melyekre $abc = 1$. Bizonyítsátok be, hogy

$$\frac{a^2 - b^2}{a + bc} + \frac{b^2 - c^2}{b + ca} + \frac{c^2 - a^2}{c + ab} \leq a + b + c - 3.$$

T–2. Feladat

Legyen $P(x)$ egy olyan racionális együtthatós polinom, melynek foka $n \geq 2$, továbbá $P(x)$-nek n páronként különböző gyöke van, amelyek ráadásul egy számtani sorozatot alkotnak. Bizonyítsátok be, hogy $P(x)$ gyökei közt van kettő, melyek éppen egy racionális együtthatós másodfokú polinom két gyöke.

T–3. Feladat

Egy csoport kalóz összevitatkozott, és most mindegyikük másik kettőre céloz a pisztolyaival. A kalózokat egyesével szólítják valamilyen sorrendben (mindenkit pontosan egyszer). Ha a szólított kalóz még életben van, akkor mindkét általa becélzott kalózra ráló (az esetleg halott(ok)ra is). Minden lövés halálos. Miután minden kalózt szólítottak, kiderült, hogy pontosan 28 kalózt öltek meg.

Bizonyítsátok be, hogy ha a kalózokat más sorrendben szólították volna, akkor is legalább 10 kalózt megöltek volna.

T–4. Feladat

Legyen n egy pozitív egész szám és $u_1, u_2, \ldots, u_n$ olyan pozitív egész számok, melyek nem nagyobbak, mint 2^k (valamilyen $k \geq 3$ egész számra). A t egész szám *reprezentáció*ja olyan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nemnegatív egészek sorozatát jelenti, melyekre

$$t = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n.$$

Bizonyítsátok be, hogy ha a t nemnegatív egész számnak létezik reprezentációja, akkor olyan reprezentációja is létezik, ahol az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok közül kevesebb, mint $2k$ szám nem nulla.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.

T–5. Feladat

Legyen ABC olyan hegyesszögű háromszög, melyre $AB < AC$, és legyen D az A-ból induló magasság talppontja. A B', illetve C' pontok úgy helyezkednek el az AB, illetve AC félegyeneseken, hogy B', C' és D egy egyenesen vannak, valamint B, C, B' és C' egy O középpontú körön vannak. Bizonyítsátok be, hogy ha M a BC szakasz felezőpontja, és H az ABC magasságpontja, akkor $DHMO$ paralelogramma.

T–6. Feladat

Az ABC háromszögben az $ABC\sphericalangle$ belső szögfelezője az AC oldalt az L pontban metszi, míg az ABC háromszög köré írt körét a $W \neq B$ pontban metszi ismét. Legyen L merőleges vetülete AW-re K. A BLC háromszög köré írt köre CK-t a $P \neq C$ pontban metszi ismét. A BP és AW egyenesek metszéspontja T. Bizonyítsátok be, hogy $AW = WT$.

T–7. Feladat

Legyen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pozitív egészek azon sorozata, melyre

$$a_1 = 1 \qquad \text{és} \qquad a_{k+1} = a_k^3 + 1, \text{ minden pozitív egész } k\text{-ra.}$$

Bizonyítsátok be, hogy minden olyan p prímszámra, mely $3\ell + 2$ alakú (ahol ℓ egy nemnegatív egész szám), létezik olyan n pozitív egész, hogy a_n osztható p-vel.

T–8. Feladat

Az n egész számot *sziléziai*nak nevezzük, ha léteznek olyan pozitív egész a, b és c számok, melyekre

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

(a) Bizonyítsátok be, hogy végtelen sok sziléziai egész szám létezik.

(b) Bizonyítsátok be, hogy nem minden pozitív egész szám sziléziai.