Zadatak T–1

Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite da je

$$\frac{a^2 - b^2}{a + bc} + \frac{b^2 - c^2}{b + ca} + \frac{c^2 - a^2}{c + ab} \leqslant a + b + c - 3.$$

Zadatak T–2

Neka je $P(x)$ polinom stupnja $n \geqslant 2$ s racionalnim koeficijentima takav da $P(x)$ ima n međusobno različitih realnih korijena koji tvore aritmetički niz. Dokažite da među korijenima od $P(x)$ postoje dva koja su ujedno korijeni nekog polinoma stupnja 2 s racionalnim koeficijentima.

Zadatak T–3

U grupi pirata neki su se međusobno posvađali i sada svaki od njih drži neku drugu dvojicu na ciljniku. Sve pirate se proziva jednog po jednog nekim redoslijedom. Ako je prozvani pirat i dalje živ, on upuca obojicu pirata koje drži na ciljniku (od kojih je neki možda već mrtav). Svi pucnjevi su smjesta smrtonosni. Nakon što su svi pirati prozvani, ispostavilo se da ih je točno 28 ubijeno. Dokažite da bi za bilo koji drugi redoslijed prozivanja bilo ubijeno najmanje 10 pirata.

Zadatak T–4

Neka je n prirodni broj i neka su u_1, u_2, $\ldots$, u_n prirodni brojevi koji nisu veći od 2^k, za neki prirodni broj $k \geqslant 3$. *Reprezentacija* nenegativnog cijelog broja t je niz $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nenegativnih cijelih brojeva takvih da je

$$t = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n.$$

Ako nenegativni cijeli broj t ima reprezentaciju, dokažite da onda ima i reprezentaciju u kojoj niz $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ima manje od $2k$ članova različitih od nule.

Vrijeme rješavanja: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Poredak zadataka ne ovisi o njihovoj težini.

Zadatak T–5

Neka je ABC šiljastokutni trokut u kojem je $|AB| < |AC|$ i neka je D nožište njegove visine iz vrha A. Točke B' i C' redom leže na polupravcima AB i AC, tako da su točke B', C' i D kolinearne i da točke B, C, B' i C' leže na istoj kružnici sa središtem O. Ako je M polovište dužine $\overline{BC}$, a H ortocentar trokuta ABC, dokažite da je $DHMO$ paralelogram.

Zadatak T–6

Neka je ABC trokut. Simetrala unutarnjeg kuta $\sphericalangle ABC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki L, a kružnicu opisanu trokutu ABC ponovno u točki $W \neq B$. Neka je K ortogonalna projekcija točke L na pravac AW. Kružnica opisana trokutu BLC siječe pravac CK ponovno u točki $P \neq C$. Pravci BP i AW se sijeku u točki T. Dokažite da je $|AW| = |WT|$.

Zadatak T–7

Neka je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ niz prirodnih brojeva takvih da je

$$a_1 = 1 \qquad \text{i} \qquad a_{k+1} = a_k^3 + 1, \text{ za sve prirodne brojeve } k.$$

Dokažite da za svaki prosti broj p oblika $3\ell + 2$, pri čemu je ℓ nenegativni cijeli broj, postoji prirodni broj n takav da p dijeli a_n.

Zadatak T–8

Cijeli broj n nazivamo *šleskim* ako postoje prirodni brojevi a, b i c takvi da je

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

(a) Dokažite da postoji beskonačno mnogo šleskih cijelih brojeva.

(b) Dokažite da nisu svi prirodni brojevi šleski.