Problème T–1

Soient a, b et c des nombres réels positifs avec $abc = 1$. Montrer que

$$\frac{a^2 - b^2}{a + bc} + \frac{b^2 - c^2}{b + ca} + \frac{c^2 - a^2}{c + ab} \leq a + b + c - 3.$$

Problème T–2

Soit $P(x)$ un polynôme de degré $n \geq 2$ à coefficients rationnels, tel que $P(x)$ admet n zéros réels deux à deux distincts, lesquels forment une progression arithmétique. Montrer que parmi les zéros de $P(x)$, il en existe deux qui sont des zéros d'un polynôme de degré 2 à coefficients rationnels.

Problème T–3

Un groupe de pirates a eu une dispute et maintenant chacun d'eux est en train de viser deux autres pirates avec ses deux armes. Les pirates sont appelés l'un après l'autre selon un ordre fixe. Si le pirate appelé est encore vivant, il tire sur les deux pirates qu'il est en train de viser (et qui peuvent être morts). Tous les tirs sont instantanément mortels. Après que tous les pirates sont appelés, il y a exactement 28 pirates qui ont été tués.

Montrer que si les pirates avaient été appelés dans n'importe quel autre ordre, il y a au moins 10 pirates qui auraient été tués.

Problème T–4

Soit n un entier naturel et $u_1, u_2, \ldots, u_n$ des entiers naturels qui ne sont pas plus grands que 2^k, pour un entier $k \geq 3$. Une *représentation* d'un entier positif ou nul t est une suite d'entiers non-négatifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ telle que

$$t = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n.$$

Montrer que si un entier non-négatif t admet une représentation, alors il admettra aussi une représentation telle que au plus $2k$ des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont non-nuls.

Durée : 5 heures
Temps pour les questions : 60 min
Chaque problème vaut 8 points.
L'ordre des problèmes ne dépend pas de la difficulté.

Problème T–5

Soit ABC un triangle aigu avec $AB < AC$ et soit D le pied de la hauteur passant par A. Les points B' et C' sont sur les demi-droites AB respectivement AC, tels que les points B', C' et D sont colinéaires et les points B, C, B' et C' sont sur le cercle de centre O. Soit M le milieu du côté BC et H l'orthocentre de ABC. Montrer que $DHMO$ est un parallélogramme.

Problème T–6

Soit ABC un triangle. La bissectrice de $\angle ABC$ coupe le côté AC en L et le cercle circonscrit de ABC une seconde fois en $W \neq B$. Soit K la projection orthogonale de L sur AW. Le cercle circonscrit au triangle BLC coupe la ligne CK une seconde fois en $P \neq C$. Les lignes BP et AW se coupent en T. Montrer que $AW = WT$.

Problème T–7

Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite d'entiers positifs telle que

$$a_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad a_{k+1} = a_k^3 + 1, \text{ pour tout entier positif } k.$$

Montrer que pour chaque nombre premier p de la forme $3\ell + 2$ avec ℓ un entier positif ou nul, il existe un entier naturel n tel que p divise a_n.

Problème T–8

Un entier n est appelé *silésien* s'il existe des entiers positifs a, b et c tels que

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

(a) Montrer qu'il existe un nombre infini d'entiers silésiens.

(b) Montrer qu'il existe des entiers naturels non-silésiens.

Durée : 5 heures
Temps pour les questions : 60 min
Chaque problème vaut 8 points.
L'ordre des problèmes ne dépend pas de la difficulté.