Aufgabe T–1

Seien a, b und c positive reelle Zahlen, für die $abc = 1$ gilt. Zeige, dass

$$\frac{a^2 - b^2}{a + bc} + \frac{b^2 - c^2}{b + ca} + \frac{c^2 - a^2}{c + ab} \leq a + b + c - 3.$$

Aufgabe T–2

Sei $P(x)$ ein Polynom vom Grad $n \geq 2$ mit rationalen Koeffizienten, das n paarweise verschiedene reelle Nullstellen besitzt, die eine arithmetische Folge bilden. Zeige, dass es unter den Nullstellen von $P(x)$ zwei gibt, die gleichzeitig auch die Nullstellen eines Polynoms vom Grad 2 mit rationalen Koeffizienten sind.

Aufgabe T–3

Eine Gruppe von Piraten ist in einen Streit geraten und nun bedroht jeder von ihnen jeweils zwei andere mit seinen zwei Pistolen. Alle Piraten werden nacheinander in einer willkürlichen Reihenfolge aufgerufen. Ist der aufgerufene Pirat noch am Leben, so schießt er auf die beiden von ihm bedrohten Piraten (auch wenn einer oder beide von ihnen bereits tot sind). Alle Schüsse treffen und sind auf der Stelle tödlich. Nachdem alle Piraten aufgerufen wurden, stellt es sich heraus, dass exakt 28 Piraten erschossen wurden.

Zeige: Auch, wenn die Piraten in irgendeiner anderen Reihenfolge aufgerufen worden wären, wären mindestens 10 Piraten erschossen worden.

Aufgabe T–4

Seien n und k positive ganze Zahlen mit $k \geq 3$. Seien $u_1, u_2, \ldots, u_n$ positive ganze Zahlen, die nicht größer als 2^k sind. Eine *Repräsentation* einer nicht-negativen ganzen Zahl t ist eine Folge von nicht-negativen ganzen Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sodass

$$t = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n.$$

Zeige: Wenn für eine nicht-negative ganze Zahlen t eine Repräsentation existiert, dann gibt es auch eine Repräsentation von t, in der weniger als $2k$ der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ungleich Null sind.

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Juryanfragen: 60 Minuten
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.

Aufgabe T–5

Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB < AC$ und sei D der Fußpunkt der Höhe von A. Die Punkte B' und C' liegen auf den Halbgeraden (Strahlen) $[AB$ bzw. $[AC$, sodass die Punkte B', C' und D auf einer Geraden und die Punkte B, C, B' und C' auf einem Kreis mit Mittelpunkt O liegen. Zeige: Wenn M der Mittelpunkt von BC und H der Höhenschnittpunkt von ABC ist, dann ist $DHMO$ ein Parallelogramm.

Anmerkung: Mit der Schreibweise $[XY$ *bezeichnen wir die Halbgerade (den Strahl), die (der) bei* X *beginnt und durch* Y *geht.*

Aufgabe T–6

Sei ABC ein Dreieck. Die innere Winkelhalbierende (Winkelsymmetrale) von $\sphericalangle ABC$ schneide die Gerade AC in L und den Umkreis des Dreiecks ABC ein zweites Mal in $W \neq B$. Sei K der Lotfußpunkt von L auf AW. Der Umkreis des Dreiecks BLC schneide die Gerade CK ein zweites Mal in $P \neq C$. Die Geraden BP und AW schneiden einander in einem Punkt T. Zeige, dass $AW = WT$.

Aufgabe T–7

Sei $a_1, a_2, a_3, \ldots$ die Folge positiver ganzer Zahlen, die durch

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{k+1} = a_k^3 + 1 \text{ für alle positiven ganzen Zahlen } k$$

gegeben ist. Zeige: Für jede Primzahl p der Form $3\ell + 2$, wobei ℓ eine nicht-negative ganze Zahl ist, existiert eine positive ganze Zahl n, sodass a_n durch p teilbar ist.

Aufgabe T–8

Eine ganze Zahl n heißt *schlesisch*, wenn es positive ganze Zahlen a, b und c gibt, sodass

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

(a) Zeige, dass es unendlich viele schlesische ganze Zahlen gibt.

(b) Zeige, dass nicht alle positiven ganzen Zahlen schlesisch sind.

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Juryanfragen: 60 Minuten
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.