Příklad T–1

Nechť pro kladná reálná čísla a, b, c platí $abc = 1$. Dokažte, že platí

$$\frac{a^2 - b^2}{a + bc} + \frac{b^2 - c^2}{b + ca} + \frac{c^2 - a^2}{c + ab} \leq a + b + c - 3.$$

Příklad T–2

Nechť $P(x)$ je mnohočlen stupně $n \geq 2$ s racionálními koeficienty, který má n různých reálných kořenů tvořících aritmetickou posloupnost. Dokažte, že mezi nimi lze nalézt dva, které jsou zároveň dvěma kořeny nějakého mnohočlenu stupně 2 s racionálními koeficienty.

Příklad T–3

Banda pirátů se pohádala, a teď každý z nich míří pistolemi na další dva piráty. Postupně jsou všichni v určitém pořadí jeden po druhém vyvoláni. Jestliže vyvolaný pirát žije, vystřelí na oba piráty, na které mířil (a to i v případě, že jsou již mrtví). Každá střela je okamžitě smrtící. Po vyvoláni všech pirátů zjistíme, že jich bylo zastřeleno právě 28.

Dokažte, že i kdyby piráti byli vyvoláni v jakémkoliv jiném pořadí, bylo by jich zastřeleno aspoň 10.

Příklad T–4

Pro přirozené číslo n uvažujme přirozená čísla $u_1, u_2, \ldots, u_n$ nepřevyšující 2^k pro některé přirozené číslo $k \geq 3$. *Reprezentací* nezáporného celého čísla t rozumíme takovou posloupnost nezáporných celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, že platí

$$t = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n.$$

Dokažte tvrzení: Pokud má nezáporné celé číslo t nějakou reprezentaci, pak má také reprezentaci, ve které je méně než $2k$ z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nenulových.

Čas na vypracování: 5 hodin
Čas na dotazy: 60 minut
Každá úloha je hodnocena nejvýše 8 body.
Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.

Příklad T–5

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, kde $|AB| < |AC|$. Označme D patu jeho výšky z vrcholu A. Body B' a C' leží po řadě na polopřímkách AB a AC tak, že body B', C' a D leží na téže přímce a body B, C, B' a C' leží na téže kružnici se středem O. Označme M střed úsečky BC a H průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že $DHMO$ je rovnoběžník.

Příklad T–6

Uvažujme trojúhelník ABC. Osa jeho vnitřního úhlu ABC protíná stranu AC v bodě L a dále kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě $W \neq B$. Kolmý průmět bodu K na přímku AW označme L. Kružnice opsaná trojúhelníku BLC dále protíná přímku CK v bodě $P \neq C$. Přímky BP a AW se protínají v bodě T. Dokažte, že platí $|AW| = |WT|$.

Příklad T–7

Definujme posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, a_3, \ldots$ takto: $a_1 = 1$ a pro každé přirozené číslo k je $a_{k+1} = a_k^3 + 1$. Dokažte, že pro všechna prvočísla p tvaru $3\ell + 2$, kde ℓ je celé nezáporné číslo, existuje takové přirozené číslo n, že p dělí a_n .

Příklad T–8

Celé číslo n nazveme *slezské*, jestliže existují přirozená čísla a, b a c tak, že

$$n = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}.$$

(a) Dokažte, že existuje nekonečně mnoho celých slezských čísel.

(b) Dokažte, že existuje přirozené číslo, které není slezské.

Čas na vypracování: 5 hodin
Čas na dotazy: 60 minut
Každá úloha je hodnocena nejvýše 8 body.
Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.