Задача I–1

Нехай $\mathbb{Q}^+$ позначає множину всіх додатних раціональних чисел і нехай $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Знайдіть усі функції $f\colon \mathbb{Q}^+ \to (\alpha, +\infty)$, які задовольняють умову

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{\alpha} \qquad \text{для всіх } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

Задача I–2

Дві фігури на малюнку нижче, які складаються з 6 та 10 одиничних квадратиків відповідно, назвемо *сходами.*

Розглянемо дошку 2018×2018, яка складається з 2018^2 клітинок, кожна з яких є одиничним квадратиком. Дві довільні клітинки з одного рядка вирізали з дошки. Доведіть, що залишок не можна розрізати (за лініями сітки) на сходи (навіть якщо фігури можна повертати).

Задача I–3

Дано гострокутний трикутник ABC, у якому $AB < AC$, і нехай D – основа висоти проведеної з вершини A. Точки R та Q – центроїди трикутників ABD і ACD відповідно. Точку P на відрізку BC обрано так, що $P \neq D$ і точки P, Q, R та D лежать на одному колі. Доведіть, що прямі AP, BQ і CR перетинаються в одній точці.

Задача I–4

(а) Доведіть, що для довільного натурального m існує таке натуральне $n \geq m$, що

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \qquad (*)$$

(б) Позначимо за $p(m)$ найменше натуральне $n \geq m$, для якого виконується рівність $(*)$. Доведіть, що $p(2018) = p(2019)$.

Зауваження: За $\lfloor x \rfloor$ позначено найбільше ціле число, що не перевищує x.

Час виконання: 5 годин
Час для запитань: 60 хвилин
Кожна задача оцінюється в 8 балів.
Порядок задач не залежить від їх складності.