The 12th Middle European Mathematical Olympiad

Posamično tekmovanje
29. avgust 2018

Slovene version

Naloga I–1

Naj bo $\mathbb{Q}^+$ množica vseh pozitivnih racionalnih števil in naj bo $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{Q}^+ \to (\alpha, \infty)$, ki zadoščajo enačbi

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{\alpha} \qquad \text{za vse } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

Naloga I–2

Spodaj prikazani obliki, sestavljeni zaporedoma iz 6 in 10 enotskih kvadratov, imenujemo *stopnišči.*

Obravnavamo tabelo velikosti 2018×2018, sestavljeno iz 2018^2 polj, od katerih je vsako enotski kvadrat. Iz iste vrstice tabele odstranimo dve poljubni polji. Dokaži, da se preostanka tabele ne da razrezati (po robovih polj) v stopnišča (ki so lahko tudi zavrtena).

Naloga I–3

Naj bo ABC tak ostrokotni trikotnik, da je $|AB| < |AC|$ in naj bo D nožišče višine iz A. Naj bosta R in Q zaporedoma težišči trikotnikov ABD in ACD. Naj bo P takšna točka na daljici BC, da $P \neq D$ in so točke P, Q, R in D konciklične. Dokaži, da se premice AP, BQ in CR sekajo v eni točki.

Naloga I–4

(a) Dokaži, da za vsako naravno število m obstaja tako naravno število $n \geq m$, da velja:

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \tag{$*$}$$

(b) Označimo s $p(m)$ najmanjše naravno število $n \geq m$, da velja enakost $(*)$. Dokaži, da je $p(2018) = p(2019)$.

Opomba: Za realno število x z $\lfloor x \rfloor$ označimo največje celo število, ki ni večje od x.

Čas: 5 ur
Čas za vprašanja: 60 min
Vsaka naloga je vredna 8 točk.
Vrstni red nalog ni odvisen od njihove težavnosti.