The 12th Middle European Mathematical Olympiad

Individuálna súťaž
29. august 2018

Slovak version

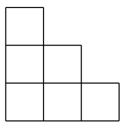
Úloha I–1

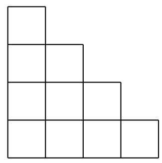
Označme $\mathbb{Q}^+$ množinu všetkých kladných racionálnych čísel a nech $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Nájdite všetky funkcie $f\colon \mathbb{Q}^+ \to (\alpha, +\infty)$ spĺňajúce

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{\alpha} \qquad \text{pre všetky } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

Úloha I–2

Útvary znázornené na obrázkoch pozostávajúce zo 6, respektíve 10 jednotkových štvorcov nazývame *schodíky*.





Majme tabuľku s rozmermi 2018×2018, pozostávajúcu z 2018^2 políčok s rozmermi jednotkového štvorca. Z tabuľky odstránime ľubovoľné dve políčka z rovnakého riadku. Dokážte, že zvyšok tabuľky nie je možné (pri rezaní po hraniciach políčok) rozrezať na schodíky (ľubovoľne otočené).

Úloha I–3

Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s $|AB| < |AC|$ a nech D je päta výšky z vrcholu A. Nech R a Q sú postupne ťažiská trojuholníkov ABD a ACD. Nech P je bod na úsečke BC taký, že $P \neq D$ a body P, Q, R a D ležia na jednej kružnici. Dokážte, že priamky AP, BQ a CR sa pretínajú v jednom bode.

Úloha I–4

(a) Dokážte, že pre každé kladné celé číslo m existuje celé číslo $n \geq m$ také, že

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \tag{$*$}$$

(b) Označme $p(m)$ najmenšie celé číslo $n \geq m$ také, že platí $(*)$. Dokážte, že $p(2018) = p(2019)$.

Poznámka: Pre reálne číslo x označujeme $\lfloor x \rfloor$ najväčšie celé číslo neprevyšujúce x.

Čas na riešenie: 5 hodín
Čas na otázky: 60 minút
Za každú úlohu je možné získať najviac 8 bodov.
Poradie úloh nezávisí od ich obtiažnosti.