Задача I–1

За $\mathbb{Q}^+$ обозначим множество всех положительных рациональных чисел и пусть $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Найдите все функции $f\colon \mathbb{Q}^+ \to (\alpha, +\infty)$, удовлетворяющие условию

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{\alpha} \qquad \text{для всех } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

Задача I–2

Две фигуры изображенные на рисунке ниже, состоящие из 6 и 10 единичных квадратов соответственно, назовём *лесенками*.

Рассмотрим доску 2018×2018, состоящую из 2018^2 клеток, каждая из которых является единичным квадратом. Две произвольные клетки из одной строки были удалены. Докажите, что оставшуюся часть доски нельзя разрезать (по линиям сетки) на лесенки. Фигуры разрешается поворачивать.

Задача I–3

Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < AC$, и пусть D – основание высоты из A. Точки R и Q – центроиды треугольников ABD и ACD соответственно. Точка P на отрезке BC выбрана так, что $P \neq D$ и точки P, Q, R и D лежат на одной окружности. Докажите, что прямые AP, BQ и CR пересекаются в одной точке.

Задача I–4

(a) Докажите, что для любого натурального m существует такое натуральное $n \geq m$, что

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \qquad (*)$$

(б) Обозначим за $p(m)$ наименьшее такое натуральное $n \geq m$, для которого равенство $(*)$ выполняется. Докажите, что $p(2018) = p(2019)$.

Замечание: Через $\lfloor x \rfloor$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x.

Время: 5 часов
Время для вопросов: 60 минут
Каждая задача оценивается в 8 баллов.
Порядок задач не зависит от их сложности.