Zadanie I–1

Niech $\mathbb{Q}^+$ oznacza zbiór wszystkich dodatnich liczb wymiernych i niech $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Q}^+ \to (\alpha, +\infty)$ spełniające równanie

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{\alpha} \qquad \text{dla dowolnych } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

Zadanie I–2

Dwie poniżej narysowane figury, złożone odpowiednio z 6 lub 10 kwadratów jednostkowych, nazywamy *klockami.*

Rozpatrzmy tablicę 2018×2018 złożoną z 2018^2 pól będących kwadratami jednostkowymi. Pewne dwa pola tablicy leżące w tym samym wierszu zostały usunięte. Udowodnić, że reszty tablicy nie można rozciąć (wzdłuż linii podziału tablicy) na (być może obrócone) klocki.

Zadanie I–3

W trójkącie ostrokątnym ABC, w którym $AB < AC$, punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka A. Punkty R i Q są odpowiednio środkami ciężkości trójkątów ABD i ACD. Niech $P \neq D$ będzie takim punktem na odcinku BC, że punkty P, Q, R i D leżą na jednym okręgu. Udowodnić, że proste AP, BQ i CR przecinają się w jednym punkcie.

Zadanie I–4

(a) Udowodnić, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej m istnieje taka liczba całkowita $n \geqslant m$, że
$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \tag{$*$}$$

(b) Oznaczmy przez $p(m)$ najmniejszą liczbę całkowitą $n \geqslant m$, dla której równanie $(*)$ jest spełnione. Udowodnić, że $p(2018) = p(2019)$.

Uwaga: Dla liczby rzeczywistej x, $\lfloor x \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x.

Czas: 5 godzin
Czas na zadawanie pytań: 60 minut
Za każde zadanie można otrzymać 8 punktów.
Kolejność zadań nie zależy od ich trudności.