Užduotis I–1

Teigiamų racionaliųjų skaičių aibę pažymėkime $\mathbb{Q}^+$. Nagrinėkime bet kurį skaičių $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Raskite visas funkcijas $f\colon \mathbb{Q}^+ \to (\alpha, +\infty)$, kurioms lygybė

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{\alpha} \qquad \text{galioja su visais } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

Užduotis I–2

Kiekvieną iš dviejų pavaizduotųjų figūrų, sudarytų atitinkamai iš 6 ir 10 vienetinių langelių, vadinsime *laiptuota*.

Nagrinėkime 2018×2018 lentą, sudarytą iš 2018^2 vienetinių langelių. Vienoje lentos eilutėje pašalinami bet kurie du langeliai. Įrodykite, kad likusios lentos dalies neįmanoma padalyti į laiptuotas figūras (galbūt pasuktas; kerpama išilgai langelių kraštinių).

Užduotis I–3

Smailiojo trikampio ABC, kuriame $AB < AC$, aukštinės iš viršūnės A pagrindas pažymėtas D. Trikampių ABD ir ACD pusiaukraštinių sankirtos taškai pažymėti atitinkamai R ir Q. Atkarpoje BC pažymėtas toks taškas P, kad $P \neq D$, o taškai P, Q, R ir D priklauso vienam apskritimui. Įrodykite, kad tiesės AP, BQ ir CR kertasi viename taške.

Užduotis I–4

(a) Įrodykite, kad kiekvienam natūraliajam skaičiui m egzistuoja natūralusis skaičius $n \geq m$, kuriam
$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \qquad (*)$$

(b) Mažiausią natūralųjį skaičių $n \geq m$, kuriam galioja lygybė $(*)$, pažymėkime $p(m)$. Įrodykite, kad $p(2018) = p(2019)$.

Pastaba. Kiekvienam realiajam skaičiui x užrašas $\lfloor x \rfloor$ reiškia didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnį už x. Užrašas $\binom{n}{m}$ žymi derinių skaičių iš n po m.

Darbui skiriamos 5 valandos.
Laikas klausimams: 60 min
Kiekviena užduotis verta 8 taškų.
Užduočių tvarka nepriklauso nuo jų sudėtingumo.