I–1. Feladat

Jelölje $\mathbb{Q}^+$ a pozitív racionális számok halmazát, és legyen $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Határozd meg az összes olyan $f\colon \mathbb{Q}^+ \to (\alpha, +\infty)$ függvényt, amelyre

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{\alpha}$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{Q}^+$-ra.

I–2. Feladat

*Lépcső*nek nevezzük az alábbi 6, illetve 10 egységnégyzetből álló alakzatokat.

Tekintsünk egy 2018×2018-as táblát, amely 2018^2 egységnégyzetből (mezőből) áll. A tábla egyik sorából két tetszőleges mezőt eltávolítottunk. Bizonyítsd be, hogy a megmaradt táblát nem lehet (a mezők határai mentén) szétvágni lépcsőkre (megengedve elforgatottakat is).

I–3. Feladat

Legyen ABC hegyesszögű háromszög, melyre $AB < AC$ és jelölje D az A-ból induló magasság talppontját. Legyen R, illetve Q az ABD, illetve ACD háromszögek súlypontja. Legyen P a BC szakasz azon pontja, melyre $P \neq D$, és P, Q, R és D egy körön vannak. Bizonyítsd be, hogy AP, BQ és CR egy ponton mennek át.

I–4. Feladat

(a) Bizonyítsd be, hogy minden m pozitív egész számhoz létezik olyan $n \geq m$ egész szám, melyre

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \tag{$*$}$$

(b) Jelölje $p(m)$ a legkisebb egész $n \geq m$ számot, melyre a $(*)$ egyenlet teljesül. Bizonyítsd be, hogy $p(2018) = p(2019)$.

Megjegyzés: Egy x valós számra $\lfloor x \rfloor$ jelöli a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb x-nél.

A feladatok megoldására 5 óra áll rendelkezésre.
Kérdéseket csak az első 60 percben lehet feltenni.
Minden feladat 8 pontot ér.
A feladatok nem nehézségi sorrendben vannak.