**Pojedinačno natjecanje**
**29. kolovoza 2018.**

**Croatian version**

### Zadatak I–1

Neka je $\mathbb{Q}^+$ skup svih pozitivnih racionalnih brojeva i neka je $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{Q}^+ \to \langle \alpha, +\infty \rangle$ takve da je

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{\alpha}, \qquad \text{za sve } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

### Zadatak I–2

Dva oblika prikazana na slici ispod, koja se sastoje od redom 6 i 10 jediničnih kvadratića, nazivamo *stepenicama*.

Promatrajmo ploču dimenzija $2018 \times 2018$ koja se sastoji od $2018^2$ polja, od kojih je svako jedinični kvadratić. Dva proizvoljna polja su uklonjena iz nekog retka ploče. Dokaži da se ostatak ploče ne može izrezati (uzduž rubova polja) u stepenice (moguće rotirane).

### Zadatak I–3

Neka je $ABC$ šiljastokutni trokut u kojem je $|AB| < |AC|$ i neka je $D$ nožište njegove visine iz vrha $A$. Neka su $R$ i $Q$ redom težišta trokuta $ABD$ i $ACD$. Neka je $P$ točka na dužini $\overline{BC}$ takva da je $P \neq D$ i da su točke $P$, $Q$, $R$ i $D$ konciklične. Dokaži da se pravci $AP$, $BQ$ i $CR$ sijeku u jednoj točki.

### Zadatak I–4

(a) Dokaži da za svaki prirodni broj $m$ postoji prirodni broj $n \geqslant m$ takav da je

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \tag{$*$}$$

(b) Označimo s $p(m)$ najmanji prirodni broj $n \geqslant m$ za koji vrijedi jednakost $(*)$. Dokaži da je $p(2018) = p(2019)$.

*Napomena: Za realni broj $x$, $\lfloor x \rfloor$ označava najveći cijeli broj koji nije veći od $x$.*

Vrijeme rješavanja: 5 sati
Vrijeme za pitanja: 60 min
Svaki zadatak vrijedi 8 bodova.
Poredak zadataka ne ovisi o njihovoj težini.