The 12th Middle European Mathematical Olympiad

Compétition individuelle
29 août 2018

French version

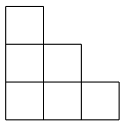
Problème I–1

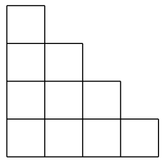
Soit $\mathbb{Q}^+$ l'ensemble de tous les nombres rationnels positifs et soit $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Q}^+ \to]\alpha, +\infty[$ telles que

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{\alpha} \qquad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

Problème I–2

Les deux pièces ci-dessous, composées de 6 respectivement 10 carrés unité, sont appelées des *escaliers.*





Considerons un échiquier 2018×2018 divisé en 2018^2 cases, qui sont toutes des carrés unité. Deux cases arbitraires de la même ligne sont enlevées. Montrer que l'échiquier restant ne peut pas être coupé (sans détruire les carrés unité) de telle manière qu'on n'obtienne uniquement des escaliers (qui peuvent être tournés).

Problème I–3

Soit ABC un triangle aigu avec $AB < AC$ et soit D le pied de la hauteur passant par A. Soient R et Q le centre de gravité du triangle ABD respectivement ACD. Soit P un point sur le segment BC tel que $P \neq D$ et que les points P, Q, R et D sont cocycliques. Montrer que les droites AP, BQ et CR se coupent en un point.

Problème I–4

(a) Prouver que pour tout entier positif m il existe un entier $n \geq m$ tel que

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \tag{$*$}$$

(b) Soit $p(m)$ le plus petit entier $n \geq m$ qui satisfait l'équation (*).
Montrer que $p(2018) = p(2019)$.

Remarque : Pour un nombre positif x, $\lfloor x \rfloor$ designe l'entier le plus grand qui n'est pas plus grand que x.

Durée : 5 heures
Temps pour les questions : 60 min
Chaque problème vaut 8 points.
L'ordre des problèmes ne dépend pas de la difficulté.