Aufgabe I–1

Sei $\mathbb{Q}^+$ die Menge aller positiven rationalen Zahlen und sei $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{Q}^+ \to (\alpha, +\infty)$ mit

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{\alpha} \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

Anmerkung: (a, b) bezeichnet das Intervall aller reellen Zahlen r mit $a < r < b$.

Aufgabe I–2

Die zwei unten gezeigten Figuren aus 6 bzw. 10 Einheitsquadraten werden *Treppen* genannt.

Wir betrachten ein 2018×2018-Brett, das aus 2018^2 Feldern in der Form von Einheitsquadraten besteht. Aus irgendeiner Zeile des Bretts werden zwei beliebige Felder entfernt. Zeige, dass es nicht möglich ist, den Rest des Bretts so (entlang von Felderkanten) zu zerschneiden, dass alle entstehenden Teile (möglicherweise gedrehte) Treppen sind.

Aufgabe I–3

Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB < AC$ und sei D der Fußpunkt der Höhe von A. Seien R und Q die Schwerpunkte der Dreiecke ABD bzw. ACD. Sei P ein Punkt auf der Strecke BC, sodass $P \neq D$ und die Punkte P, Q, R und D auf einem Kreis liegen. Zeige, dass die Geraden AP, BQ und CR einander in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

Aufgabe I–4

(a) Zeige: Für jede positive ganze Zahl m gibt es eine ganze Zahl $n \geq m$, sodass

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \qquad (*)$$

(b) Wir bezeichnen mit $p(m)$ die kleinste ganze Zahl $n \geq m$, für die die Gleichung $(*)$ gilt. Zeige, dass $p(2018) = p(2019)$.

Anmerkung: Für eine reelle Zahl x bezeichnet man mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

Zeit: 5 Stunden
Zeit für Juryanfragen: 60 Minuten
Jede Aufgabe wird mit maximal 8 Punkten bewertet.
Die Reihenfolge der Aufgaben ist unabhängig von ihrer Schwierigkeit.