Příklad I–1

Označme $\mathbb{Q}^+$ množinu všech kladných racionálných čísel a uvažujme $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{Q}^+ \to (\alpha, +\infty)$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{Q}^+$ platí

$$f\left(\frac{x+y}{\alpha}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{\alpha}.$$

Příklad I–2

Následující dva obrazce sestávající po řadě ze 6 a 10 jednotkových čtverců nazveme *schůdky*.

Uvažujme tabulku 2018×2018 složenou z 2018^2 buněk, z nichž každá je jednotkovým čtvercem. Odstraníme libovolné dvě buňky z jednoho řádku. Dokažte, že zbytek tabulky nelze rozstříhat (po stranách buněk) na schůdky (libovolně otočené).

Příklad I–3

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, kde $|AB| < |AC|$. Označme D patu jeho výšky z vrcholu A. Dále označme R a Q po řadě těžiště trojúhelníků ABD a ACD. Nechť P je takový bod úsečky BC, že $P \neq D$ a body P, Q, R a D leží na téže kružnici. Dokažte, že se přímky AP, BQ a CR protínají ve společném bodě.

Příklad I–4

(a) Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo m existuje celé číslo $n \geq m$ takové, že

$$\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdots \left\lfloor \frac{n}{m} \right\rfloor = \binom{n}{m}. \tag{$*$}$$

(b) Označme $p(m)$ nejmenší celé číslo $n \geq m$, které vyhovuje rovnici $(*)$. Dokažte, že platí $p(2018) = p(2019)$.

Poznámka: Pro reálné číslo x značí $\lfloor x \rfloor$ největší celé číslo, které nepřevyšuje x.

Čas na vypracování: 5 hodin
Čas na dotazy: 60 minut
Každá úloha je hodnocena nejvýše 8 body.
Úlohy nejsou řazeny dle obtížnosti.